CS (MAIN) EXAM, 2010

Sl. No. 253

C-DTN-K-NUB

MATHEMATICS

Paper II

Time Allowed : Three Hours | *Maximum Marks : 300*

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in Hindi and in English.

Answers must be written in the medium specified in the Admission Certificate issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for the purpose. No marks will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Certificate.

Candidates should attempt Questions 1 and 5 which are compulsory, and any ***three*** *of the remaining questions selecting at least* ***one*** *question from each Section.*

Assume suitable data if considered necessary and indicate the same clearly.

Symbols and notations carry usual meaning, unless otherwise indicated.

All questions carry equal marks.

ध्यान दें : अनुदेशों का हिन्दी रूपान्तर इस प्रश्न-पत्र के पिछले पृष्ठ पर छपा है ।

Section 'A'

1. Attempt any *five* of the following :

(a) Let $G = \mathbb{R} - \{-1\}$ be the set of all real numbers omitting -1. Define the binary relation $*$ on G by $a * b = a + b + ab$. Show $(G, *)$ is a group and it is abelian 12

(b) Show that a cyclic group of order 6 is isomorphic to the product of a cyclic group of order 2 and a cyclic group of order 3. Can you generalize this ? Justify. 12

(c) Discuss the convergence of the sequence $\{x_n\}$

where $x_n = \dfrac{sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)}{8}$. 12

(d) Define $\{x_n\}$ by $x_1 = 5$ and

$x_{n+1} = \sqrt{4 + x_n}$ for $n > 1$. 12

Show that the sequence converges to $\dfrac{\left(1 + \sqrt{17}\right)}{2}$.

(e) Show that

$u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ is a harmonic function.

Find a harmonic conjugate of $u(x, y)$. Hence find the analytic function f for which $u(x, y)$ is the real part. 12

खण्ड 'क'

1. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** के उत्तर दीजिए :

(क) –1 को छोड़कर सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को $G = \mathbb{R} - \{-1\}$ लीजिए। G पर द्वयी संबंध $*$ को $a * b = a + b + ab$ द्वारा परिभाषित कीजिए। दिखाइए $(G, *)$ एक समूह है और यह आबेली है। 12

(ख) दिखाइए कि कोटि 6 का एक चक्रीय समूह कोटि 2 के एक चक्रीय समूह और कोटि 3 के एकचक्रीय समूह के गुणनफल से तुल्याकारी होता है। क्या आप इसका व्यापकीकरण कर सकते हैं ? औचित्य बताइए। 12

(ग) अनुक्रम $\{x_n\}$ की अभिसारिता की विवेचना कीजिए,

जहाँ $x_n = \dfrac{sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)}{8}$ । 12

(घ) $\{x_n\}$ को $x_1 = 5$ और

$n > 1$ के लिए $x_{n+1} = \sqrt{4 + x_n}$ से परिभाषित कीजिए।

दिखाइए कि अनुक्रम $\dfrac{\left(1 + \sqrt{17}\right)}{2}$ की ओर अभिसरण करता है। 12

(ङ) दिखाइए कि

$u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ एक प्रसंवादी फलन है। $u(x, y)$ का एक प्रसंवादी संयुग्मी ज्ञात कीजिए। अतः विश्लेषिक फलन f ज्ञात कीजिए जिसके लिए $u(x, y)$ वास्तविक भाग है। 12

(f) Construct the dual of the primal problem :

Maximize $z = 2x_1 + x_2 + x_3$, subject to the constraints $x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$, $3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3$, $-4x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1$, and $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. 12

2. (a) Let $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ be the multiplicative group of non-zero reals and $(GL(n, \mathbb{R}), X)$ be the multiplicative group of $n \times n$ non-singular real matrices. Show that the quotient group $GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R})$ and $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ are isomorphic where

$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / \det A = 1\}$.

What is the centre of $GL(n, \mathbb{R})$? 15

(b) Let $C = \{f : I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ is continuous}\}$.

Show C is a commutative ring with 1 under pointwise addition and multiplication.

Determine whether C is an integral domain. Explain. 15

(c) Define the function

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \quad \text{if } x \neq 0$$

$$= 0, \quad \text{if } x = 0$$

Find $f'(x)$. Is $f'(x)$ continuous at $x = 0$? Justify your answer. 15

(च) आद्य समस्या :

अधिकतमीकरण कीजिए $z = 2x_1 + x_2 + x_3$ का व्यवरोधकों के अधीन

$x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 6,\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3,$
$-4x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1,$ और $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.$ की प्रतिसमस्या की रचना कीजिए। 12

2. (क) मान लीजिए $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ शून्येतर वास्तविक संख्याओं का गुणनात्मक समूह है और $(GL(n, \mathbb{R}), X)$ $n \times n$ व्युत्क्रमणीय वास्तविक आव्यूहों का गुणनात्मक समूह है। दिखाइए कि विभाग समूह

$GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R})$ और $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ तुल्याकारी हैं जहां

$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / \det A = 1\}$ है।
$GL(n, \mathbb{R})$ का केन्द्र क्या है ? 15

(ख) लीजिए $C = \{f : I = [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f$ संतत है$\}$ दिखाइये बिन्दुशः योग और गुणन के अधीन C एक 1 सहित क्रमविनिमेय वलय है। निर्धारण कीजिए कि C एक पूर्णांकीय प्रांत है। समझाइये। 15

(ग) फलन परिभाषित कीजिए

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \text{ यदि } x \neq 0$$
$$= 0, \qquad \text{यदि } x = 0$$

$f'(x)$ ज्ञात कीजिए। क्या $x = 0$ पर $f'(x)$ संतत है ? अपने उत्तर का औचित्य बताइए। 15

(d) Consider the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

Find the values of x for which it is convergent and also the sum function.

Is the convergence uniform ? Justify your answer. 15

3. (a) Consider the polynomial ring $Q[x]$. Show $p(x) = x^3 - 2$ is irreducible over Q. Let I be the ideal in $Q[x]$ generated by $p(x)$. Then show that $Q[x]/I$ is a field and that each element of it is of the form $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ with a_0, a_1, a_2 in Q and $t = x + I$. 15

(b) Show that the quotient ring $\mathbb{Z}[i]/(1 + 3i)$ is isomorphic to the ring $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ where $\mathbb{Z}[i]$ denotes the ring of Gaussian integers. 15

(c) Let $f_n(x) = x^n$ on $-1 < x \leq 1$ for $n = 1, 2, \ldots$. Find the limit function. Is the convergence uniform ? Justify your answer. 15

(d) Find the maxima, minima and saddle points of the surface $Z = (x^2 - y^2)\, e^{(-x^2-y^2)/2}$. 15

4. (a) (i) Evaluate the line integral $\int_c f(z)\, dz$ where $f(z) = z^2$, c is the boundary of the triangle with vertices $A\,(0, 0)$, $B\,(1, 0)$, $C\,(1, 2)$ in that order.

(ii) Find the image of the finite vertical strip R : $x = 5$ to $x = 9$, $-\pi \leq y \leq \pi$ of z-plane under exponential function. 15

(घ) श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}$ को विचारिए।

x के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए यह अभिसारी है और योग फलन भी ज्ञात कीजिए। क्या अभिसरण एकसमान है ? अपने उत्तर का औचित्य बताइए। 15

3. (क) बहुपद वलय $Q[x]$ मान लीजिए। दिखाइए Q पर $p(x) = x^3 - 2$ अलघुकरणीय है। मान लीजिए I $p(x)$ से जनित $Q[x]$ में गुणजावली है। तो दिखाइए कि $Q[x]/I$ एक क्षेत्र है और कि इसका प्रत्येक अवयव a_0, a_1, a_2 Q में और $t = x + I$ के साथ $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ रूप का है। 15

(ख) दिखाइए कि विभाग वलय $\mathbb{Z}[i]/(1 + 3i)$ वलय $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ से तुल्याकारी है जहां $\mathbb{Z}[i]$ गाऊसीय संख्याओं के वलय को सूचित करता है। 15

(ग) लीजिए $n = 1, 2, \ldots$ के लिए $-1 < x \leq 1$ पर $f_n(x) = x^n$

सीमा फलन ज्ञात कीजिए। क्या अभिसरण एकसमान है ? अपने उत्तर का औचित्य बताइए। 15

(घ) पृष्ठ $Z = \left(x^2 - y^2\right) e^{(-x^2-y^2)/2}$ के उच्चिष्ठ, निम्निष्ठ और पल्याण बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए। 15

4. (क) (i) रेखा समाकल $\int_C f(z)\, dz$ का मान निकालिए जहां $f(z) = z^2$, c शीर्षों $A\ (0, 0)$, $B\ (1, 0)$, $C\ (1, 2)$, इसी क्रम में, वाले त्रिभुज की परिसीमा है।

(ii) चरघातांकी फलन के अधीन z-समतल की परिमित ऊर्ध्वाधर पट्टी

$R:\ x = 5$ से $x = 9$ तक, $-\pi \leq y \leq \pi$ का प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए। 15

(b) Find the Laurent series of the function

$$f(z) = \exp\left[\frac{\lambda}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] \text{ as } \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$$

for $0 < |z| < \infty$

where $C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\phi - \lambda \sin \phi) d\phi$,

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

with λ a given complex number and taking the unit circle C given by $z = e^{i\phi} (-\pi \leq \phi \leq \pi)$ as contour in this region. 15

(c) Determine an optimal transportation programme so that the transportation cost of 340 tons of a certain type of material from three factories F_1, F_2, F_3 to five warehouses W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 is minimized. The five warehouses must receive 40 tons, 50 tons, 70 tons, 90 tons and 90 tons respectively. The availability of the material at F_1, F_2, F_3 is 100 tons, 120 tons, 120 tons respectively. The transportation costs per ton from factories to warehouses are given in the table below :

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
F_1	4	1	2	6	9
F_2	6	4	3	5	7
F_3	5	2	6	4	8

Use Vogel's approximation method to obtain the initial basic feasible solution. 30

(ख) $0 < |z| < \infty$ के लिए फलन

$f(z) = \exp\left[\frac{\lambda}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]$ की लौराँ श्रेणी $\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$

के रूप में ज्ञात कीजिए जहां एक दी हुई सम्मिश्र संख्या λ के साथ और $z = e^{i\phi} (-\pi \leq \phi \leq \pi)$ से दिए गये एकांक वृत्त C को इस क्षेत्र में परिरेखा के रूप में लेते हुए

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\phi - \lambda \sin \phi) d\phi,$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots..$$

15

(ग) एक इष्टतम परिवहन प्रोग्राम निर्धारित कीजिए जिससे कि किसी एक प्रकार के 340 टन माल को तीन फैक्टरियों F_1, F_2, F_3 से पाँच गोदामों W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 तक ले जाने में परिवहन लागत न्यूनतम हो। पांच गोदामों में क्रमश: 40 टन, 50 टन, 70 टन, 90 टन और 90 टन माल पहुंचना चाहिए। F_1, F_2, F_3 पर माल की प्राप्यता क्रमश: 100 टन, 120 टन, 120 टन है। फैक्टरियों से गोदामों तक की प्रति टन परिवहन लागत निम्न सारणी में दी हुई है :

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
F_1	4	1	2	6	9
F_2	6	4	3	5	7
F_3	5	2	6	4	8

प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल प्राप्त करने के लिए वोगल की सन्निकटन विधि का उपयोग कीजिए। 30

Section 'B'

5. Attempt any *five* of the following :

(a) Solve the *PDE*

$$\left(D^2 - D'\right)(D - 2D')Z = e^{2x+y} + xy.$$ 12

(b) Find the surface satisfying the *PDE* $\left(D^2 - 2DD' + D'^2\right)Z = 0$ and the conditions that $bZ = y^2$ when $x = 0$ and $aZ = x^2$ when $y = 0$. 12

(c) Find the positive root of the equation

$$10x\,e^{-x^2} - 1 = 0$$

correct up to 6 decimal places by using Newton-Raphson method. Carry out computations only for three iterations. 12

(d) (i) Suppose a computer spends 60 per cent of its time handling a particular type of computation when running a given program and its manufacturers make a change that improves its performance on that type of computation by a factor of 10. If the program takes 100 sec to execute, what will its execution time be after the change ?

(ii) If $A \oplus B = AB' + A'B$, find the value of $x \oplus y \oplus z$. 6+6

(e) A uniform lamina is bounded by a parabolic arc of latus rectum $4a$ and a double ordinate at a distance b from the vertex.

If $b = \frac{a}{3}\left(7 + 4\sqrt{7}\right)$, show that two of the principal axes at the end of a latus rectum are the tangent and normal there. 12

खण्ड 'ख'

5. निम्नलिखित में से किन्हीं **पांच** के उत्तर दीजिए :

(क) आंशिक अवकल समीकरण (PDE)

$$\left(D^2 - D'\right)(D-2D')Z = e^{2x+y} + xy$$

का हल निकालिए। 12

(ख) आंशिक अवकल समीकरण (PDE)

$$\left(D^2 - 2DD' + D'^2\right)Z = 0$$

और प्रतिबंधों कि $bZ = y^2$ जब $x = 0$ और $aZ = x^2$ जब $y = 0$ को पूरा करने वाले पृष्ठ को ज्ञात कीजिए। 12

(ग) न्यूटन-रेफ्सन विधि का उपयोग करके समीकरण

$$10x\,e^{-x^2} - 1 = 0$$

के 6 दशमलव अंकों तक संशुद्ध धन मूल को ज्ञात कीजिए। केवल तीन पुनरावृत्तियों तक ही अभिकलन कीजिए। 12

(घ) (i) मान लीजिए कि एक कम्पूटर जब एक दिये हुए प्रोग्राम को चलाते हुए एक विशेष प्रकार के अभिकलन को करने में अपने समय का 60 प्रतिशत समय लगाता है और इसके निर्माता कुछ परिवर्तन करते हैं जिससे इस तरह के अभिकलन पर इसके कार्य में 10 गुना सुधार हो जाता है। यदि प्रोग्राम निष्पादन करने में 100 सेकंड लेता है, तो परिवर्तन के बाद इसका निष्पादन समय क्या होगा ?

(ii) यदि $A \oplus B = AB' + A'B$, तो $x \oplus y \oplus z$ का मान ज्ञात कीजिए। 6+6

(ङ) एक एकसमान पटल नाभिलंब $4a$ वाले परवलयिक चाप और शीर्ष से दूरी b पर एक द्विकोटि से परिबद्ध है। यदि $b = \frac{a}{3}\left(7 + 4\sqrt{7}\right)$ है, तो दिखाइए कि एक नाभिलंब के सिरे पर मुख्य अक्षों में से दो स्पर्श रेखा और वहां पर अभिलंब हैं। 12

(f) In an incompressible fluid the vorticity at every point is constant in magnitude and direction; show that the components of velocity u, v, w are solutions of Laplace's equation. 12

6. (a) Solve the following partial differential equation

$$zp + yq = x$$

$x_0(s) = s$, $y_0(s) = 1$, $z_0(s) = 2s$

by the method of characteristics. 20

(b) Reduce the following 2nd order partial differential equation into canonical form and find its general solution

$$x\, u_{xx} + 2x^2 u_{xy} - u_x = 0.$$ 20

(c) Solve the following heat equation

$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0$

$u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad t > 0$

$u(x, 0) = x(2 - x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 2.$ 20

7. (a) Given the system of equations

$$2x + 3y = 1$$
$$2x + 4y + z = 2$$
$$2y + 6z + Aw = 4$$
$$4z + Bw = C$$

State the solvability and uniqueness conditions for the system. Give the solution when it exists. 20

(b) Find the value of the integral

$$\int_1^5 \log_{10} x \, dx$$

by using Simpson's $\frac{1}{3}$-rule correct up to 4 decimal places. Take 8 subintervals in your computation. 20

(च) किसी असंपीड्य तरल में भ्रमिलता हरेक बिन्दु पर परिमाण और दिशा में एकसमान है, दिखाइए कि वेग के घटक u, v, w लाप्लास समीकरण के हल हैं। 12

6. (क) अभिलक्षणों की विधि से निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण

$$zp + yq = x$$

$x_0(s) = s,\ y_0(s) = 1,\ z_0(s) = 2s$ को हल कीजिए। 20

(ख) निम्नलिखित द्विकोटि आंशिक अवकल समीकरण $x\,u_{xx} + 2x^2 u_{xy} - u_x = 0$ को विहित रूप में समानयन कीजिए और इसके व्यापक हल को ज्ञात कीजिए। 20

(ग) निम्नलिखित हीट समीकरण को हल कीजिए :

$$u_t - u_{xx} = 0,\quad 0 < x < 2,\quad t > 0$$
$$u(0, t) = u(2, t) = 0,\quad t > 0$$
$$u(x, 0) = x(2 - x),\quad 0 \leq x \leq 2.$$

20

7. (क) समीकरण निकाय दिया हुआ है :

$$2x + 3y = 1$$
$$2x + 4y + z = 2$$
$$2y + 6z + Aw = 4$$
$$4z + Bw = C$$

निकाय के लिए साधनीयता और अद्वितीयता प्रतिबंधों को बताइए। हल दीजिए जब यह होता है। 20

(ख) सिम्पसन के तिहाई नियम के उपयोग द्वारा समाकल $\int_1^5 \log_{10} x\, dx$ का 4 दशमलव अंकों तक संशुद्ध मान ज्ञात कीजिए। अपने अभिकलन में 8 उपांतरालों को लीजिए। 20

(c) (i) Find the hexadecimal equivalent of the decimal number $(587632)_{10}$

(ii) For the given set of data points

$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots\ldots (x_n, f(x_n))$

write an algorithm to find the value of $f(x)$ by using Lagrange's interpolation formula.

(iii) Using Boolean algebra, simplify the following expressions

(i) $a + a'b + a'b'c + a'b'c'd + \ldots\ldots$

(ii) $x'y'z + yz + xz$

where x' represents the complement of x.

5+10+5

8. (a) A sphere of radius a and mass m rolls down a rough plane inclined at an angle α to the horizontal. If x be the distance of the point of contact of the sphere from a fixed point on the plane, find the acceleration by using Hamilton's equations. 30

(b) When a pair of equal and opposite rectilinear vortices are situated in a long circular cylinder at equal distances from its axis, show that the path of each vortex is given by the equation

$$\left(r^2\sin^2\theta - b^2\right)\left(r^2 - a^2\right)^2 = 4a^2b^2r^2\sin^2\theta,$$

θ being measured from the line through the centre perpendicular to the joint of the vortices. 30

(ग) (i) दशमलव संख्या $(587632)_{10}$ के तुल्य षट्दशमलव ज्ञात कीजिए।

(ii) दत्त बिन्दुओं के दिये हुए समुच्चय
$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots\ldots (x_n, f(x_n))$
के लिए लग्रांज अंतर्वेशन-सूत्र के उपयोग से $f(x)$ का मान ज्ञात करने के लिए एक एल्गोरिथ्म लिखिए।

(iii) बूलीय बीजावली का उपयोग करके, निम्नलिखित व्यंजकों को सरल कीजिए :

(i) $a + a'b + a'b'c + a'b'c'd + \ldots\ldots$

(ii) $x'y'z + yz + xz$

जहां x' x के पूरक को सूचित करता है।

5+10+5

8. (क) त्रिज्या a और द्रव्यमान m का एक गोला क्षैतिज से कोण α पर झुके हुए एक रुक्ष समतल पर लुढ़कता है। यदि x समतल पर एक नियत बिन्दु से गोले के स्पर्श बिन्दु की दूरी है, तो हैमिल्टन समीकरण का उपयोग करके त्वरण ज्ञात कीजिए। 30

(ख) जब समान और सम्मुख रेखीय भ्रमिलों का एक युग्म एक लंबे वृत्तीय बेलन में इसके अक्ष से समान दूरी पर स्थित हों, तो दिखाइए कि प्रत्येक भ्रमिल का पथ समीकरण

$$\left(r^2\sin^2\theta - b^2\right)\left(r^2 - a^2\right)^2 = 4a^2b^2r^2\sin^2\theta$$

से दिया हुआ है, θ मापा जाता है केन्द्र से गुजरने वाली रेखा से जो कि भ्रमिलों के जोड़ पर लंब है। 30

C-DTN-K-NUB

गणित

प्रश्न-पत्र II

समय : तीन घण्टे | पूर्णांक : 300

अनुदेश

प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपा है।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख उत्तर-पुस्तक के मुखपृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्रवेश-पत्र पर उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं दिये जाएंगे।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं। बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

यदि आवश्यक हो तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

प्रतीकों और संकेतनों के प्रचलित अर्थ हैं, जब तक अन्यथा न कहा गया हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

***Note :** English version of the Instructions is printed on the front cover of this question paper.*