Sl. No. 136

CS (MAIN) EXAM, 2010

C–DTN–K–TUA

STATISTICS

Paper—I

Time Allowed : Three Hours	Maximum Marks : 300

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in Hindi and in English.

Answers must be written in the medium specified in the Admission Certificate issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for the purpose. No marks will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Certificate.

Candidates should attempt Question Nos. ***1*** *and* ***5*** *which are compulsory, and any* ***three*** *of the remaining questions selecting at least* ***one*** *question from each Section.*

The number of marks carried by each question is indicated at the end of the question.

Assume suitable data if considered necessary and indicate the same clearly.

Notations and symbols used are as usual.

ध्यान दें : अनुदेशों का हिन्दी रूपान्तर इस प्रश्न-पत्र के पिछले पृष्ठ पर छपा है।

Section—A

1. Answer *any* **five** parts of the following : 12×5=60

(a) 5% residents of a locality are earning more than Rs 10 lakhs per annum. The percentage of single earner in the family among those earning more than Rs 10 lakhs per annum is 80%, whereas percentage of single earner among others (earning less than Rs 10 lakhs per annum) is 50%. A randomly selected resident of that locality was found to be single earner. What is the probability that he earns more than Rs 10 lakhs per annum?

(b) T is a triangle in (X, Y) plane with vertices $(0, 0)$, $(0, \sqrt{2})$ and $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Let $F(x, y)$ denote the area of intersection of T and the set $S = \{(a, b) : a \le x, b \le y\}$. Does F define a cumulative distribution function? If yes, find the joint probability density function.

(c) Two players A and B decide to play a series of at most 7 games. A player who wins 4 games wins the series. If both the players have equal chance of winning a game and A wins the first two games, what is the probability that A will win the series?

(d) A city has N taxis numbered 1 to N. A person standing at a crossing noted numbers of n taxis that pass that

खण्ड—क

1. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** भागों के उत्तर दीजिए : $12 \times 5 = 60$

(क) किसी स्थान के 5% निवासी प्रतिवर्ष 10 लाख रु० से अधिक कमाते हैं। प्रतिवर्ष 10 लाख रु० से अधिक कमाने वालों के मध्य परिवार में अकेले कमाने वालों की प्रतिशत 80% है, जबकि अन्य (प्रतिवर्ष 10 लाख रु० से कम कमाने वालों) के मध्य अकेले कमाने वालों का प्रतिशत 50% है। यादृच्छिक रूप से चुने गये उस स्थान के एक निवासी को अकेले कमाने वाला पाया गया। क्या प्रायिकता है कि वह प्रतिवर्ष 10 लाख रु० से अधिक कमाता है?

(ख) (X, Y) तल में $(0, 0)$, $(0, \sqrt{2})$ और $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ शीर्षों वाला एक त्रिभुज T है। माना कि $F(x, y)$ T और समुच्चय $S = \{(a, b) : a \leq x, \; b \leq y\}$ के प्रतिच्छेदन का क्षेत्रफल निर्दिष्ट करता है। क्या F कोई संचयी बंटन फलन परिभाषित करता है? यदि हाँ, तो संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन प्राप्त कीजिए।

(ग) दो खिलाड़ी A और B अधिकतम 7 खेलों की एक श्रेणी खेलने का निश्चय करते हैं। कोई खिलाड़ी जो 4 खेल जीतता है, श्रेणी जीतता है। यदि दोनों खिलाड़ियों के खेल जीतने की सम्भावना बराबर है और A प्रथम दो खेल जीतता है, तो A की श्रेणी जीतने की प्रायिकता क्या है?

(घ) एक शहर में 1 से N तक क्रमांकित N टैक्सियाँ हैं। एक व्यक्ति एक चौराहे पर खड़ा होकर उस चौराहे से गुज़रने वाली n टैक्सियों (एक ही टैक्सी दो बार नहीं गुज़रती) की

crossing (same taxi does not pass twice). If M_n is the highest taxi number noted, find an unbiased estimate of N based on M_n.

(e) Let $X_1, X_2, ..., X_n$ be the lifetime of n randomly selected patients of cancer. An estimate is required for the probability that a patient survives beyond time t, i.e., $P(X > t) = S(t)$. Find the maximum likelihood estimator of $S(t)$, if lifetime X of the patients follow the following probability density function :

$$f(x) = \frac{2x}{\beta}\exp(-x^2/\beta), \quad \text{if } x > 0$$
$$= 0 \quad , \quad \text{otherwise}$$

(f) Let U_X be the number of Y's those are smaller than X's in independent random samples $X_1, X_2, ..., X_n$ and $Y_1, Y_2, ..., Y_m$. Find $E(U_X)$.

2. (a) Cumulative distribution function (c.d.f.) of a random variable X is

$$F(x) = 0 \ , \quad \text{if} \quad x < 0$$
$$= \frac{1}{4} \ , \quad \text{if} \quad 0 \le x < 1$$
$$= \frac{x}{3} \ , \quad \text{if} \quad 1 \le x < 2$$
$$= 1 \ , \quad \text{if} \quad x \ge 2$$

Find α such that we can write $F(x) = \alpha F_c(x) + (1-\alpha)F_d(x)$, where $F_c(x)$ and $F_d(x)$ are c.d.f. of continuous and discrete random variables respectively. Find $F_c(x)$ and $F_d(x)$. 20

संख्या नोट करता है। यदि नोट किये गये टैक्सी संख्याओं में M_n अधिकतम हो, तो M_n पर आधारित N का अनभिनत आकलन प्राप्त कीजिए।

(ङ) माना कि यादृच्छिक रूप से चुने गये n कैंसर के रोगियों का जीवन-काल $X_1, X_2, \ldots, X_n$ है। एक रोगी के t से अधिक समय जीवित रहने की प्रायिकता, अर्थात् $P(X > t) = S(t)$, के लिए आकलन अपेक्षित है। $S(t)$ का अधिकतम संभाविता आकलक प्राप्त कीजिए, यदि रोगियों का जीवन-काल X निम्नलिखित प्रायिकता घनत्व फलन का अनुसरण करता है :

$$f(x) = \frac{2x}{\beta}\exp(-x^2/\beta), \quad \text{यदि } x > 0$$
$$= 0 \quad , \quad \text{अन्यथा}$$

(च) स्वतंत्र यादृच्छिक प्रतिदर्शों $X_1, X_2, \ldots, X_n$ और $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ में, माना कि U_X उन Y की संख्या है जो X से छोटे हैं। $E(U_X)$ प्राप्त कीजिए।

2. (क) किसी यादृच्छिक चर X का संचयी बंटन फलन (सं० बं० फ०) है

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \;, && \text{यदि} \quad x < 0 \\ &= \frac{1}{4} \;, && \text{यदि} \quad 0 \le x < 1 \\ &= \frac{x}{3} \;, && \text{यदि} \quad 1 \le x < 2 \\ &= 1 \;, && \text{यदि} \quad x \ge 2 \end{aligned}$$

α इस प्रकार प्राप्त कीजिए कि हम $F(x) = \alpha F_c(x) + (1-\alpha)F_d(x)$ लिख सकें, जहाँ $F_c(x)$ और $F_d(x)$ क्रमशः सतत और असतत यादृच्छिक चरों के सं० बं० फ० हैं। $F_c(x)$ और $F_d(x)$ प्राप्त कीजिए। 20

(b) The joint probability density function of random variables X and Y is given as

$$f(x, y) = k(y^2 - x^2)e^{-y} \quad , \text{ if } |x| < y, \ y > 0$$
$$= 0 \quad , \text{ otherwise}$$

Comment on independence and correlation between X and Y. 20

(c) Explain consistency of estimators. Prove that second smallest observation in a random sample of size n from the following probability density function is consistent estimator of θ : 20

$$f(x|\theta) = \exp(-(x - \theta)) \, , \quad \text{if} \quad x > \theta$$
$$= 0 \quad , \quad \text{otherwise}$$

3. (a) The joint probability density function of X and Y is

$$f(x, y) = \frac{1}{2} x e^{-y}, \quad \text{if} \quad 0 < x < 2, \ y > 0$$
$$= 0 \quad , \quad \text{elsewhere}$$

Derive the distribution of $X + Y$. 20

(b) Explain convergence in rth mean and convergence almost sure. Check various modes of the convergence for $\{X_n\}$, where X_n's are independently distributed as follows : 20

$$P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n^r} \text{ and } P[X_n = n] = \frac{1}{n^r}$$

where $r \geq 2$ and $n = 1, 2, \ldots$

(c) State and prove Wald's fundamental identity of sequential analysis. 20

(ख) X और Y यादृच्छिक चरों के संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x, y) = k(y^2 - x^2)e^{-y}, \text{ यदि } |x| < y, \; y > 0$$
$$= 0 \quad , \text{ अन्यथा}$$

की भाँति दिया गया है। X और Y के बीच स्वतंत्रता और सहसम्बद्धता पर टिप्पणी कीजिए। 20

(ग) आकलकों की संगतता को समझाइए। सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित प्रायिकता घनत्व फलन से n आमाप के यादृच्छिक प्रतिदर्श में दूसरा सबसे छोटा प्रेक्षण θ का संगत आकलक है : 20

$$f(x|\theta) = \exp(-(x - \theta)) \,, \quad \text{यदि } x > \theta$$
$$= 0 \quad , \text{ अन्यथा}$$

3. (क) X और Y का संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन है

$$f(x, y) = \frac{1}{2} x e^{-y}, \text{ यदि } 0 < x < 2, \; y > 0$$
$$= 0 \quad , \text{ अन्यत्र}$$

$X + Y$ का बंटन व्युत्पन्न कीजिए। 20

(ख) r वें माध्य में अभिसरण और निश्चित प्राय अभिसरण को समझाइए। $\{X_n\}$ के लिए विभिन्न प्रकार के अभिसरणों की जाँच कीजिए, जहाँ X_n स्वतंत्र रूप से निम्नलिखित तरह से बंटित हैं : 20

$$P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n^r} \text{ और } P[X_n = n] = \frac{1}{n^r}$$
$$\text{जहाँ } r \geq 2 \text{ और } n = 1, 2, \ldots$$

(ग) अनुक्रमिक विश्लेषण के वाल्ड के मौलिक सर्वसमिका का कथन दीजिए और सिद्ध कीजिए। 20

4\. *(a)* The following is a random sample of 10 numbers lying between (0, 1) :

0·22	0·90	0·96	0·78	0·66
0·18	0·73	0·58	0·11	0·97

We wish to test the hypothesis H_0 : sample comes from uniform distribution on (0, 1). Explain, how you will use Kolmogorov-Smirnov test of goodness of fit for H_0. Obtain the value of test statistic. 20

(b) A random observation X belongs to a population having probability density function $f(x)$. Describe likelihood ratio test for testing $H_0 : f(x) = f_1(x)$ against $H_1 : f(x) = f_2(x)$ based on a single observation, when

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

and

$$f_2(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$ 20

(c) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ is a random sample from Bernoulli population with parameter θ. Consider that θ has beta prior distribution with hyper-parameters (a, b). Obtain Bayes estimator for θ under quadratic loss function and hence obtain min max estimator for θ. 20

4\. (क) (0, 1) के बीच पड़ने वाली 10 संख्याओं का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श निम्नलिखित है :

0·22	0·90	0·96	0·78	0·66
0·18	0·73	0·58	0·11	0·97

हम परिकल्पना, H_0 : प्रतिदर्श, (0, 1) पर एकसमान बंटन से लिया गया है, का परीक्षण करना चाहते हैं। समझाइए कि H_0 के लिए कोलमोगोरोव-स्मिरनोव के आसंजन श्रेष्ठता परीक्षण को आप कैसे प्रयुक्त करेंगे। परीक्षण प्रतिदर्शज का मान प्राप्त कीजिए। 20

(ख) एक यादृच्छिक प्रेक्षण X, प्रायिकता घनत्व फलन $f(x)$ रखने वाली समष्टि से सम्बन्धित है। अकेले प्रेक्षण पर आधारित $H_0 : f(x) = f_1(x)$ का परीक्षण $H_1 : f(x) = f_2(x)$ के विरुद्ध करने के लिए संभाविता अनुपात परीक्षण का वर्णन कीजिए, जब

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

और

$$f_2(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$ 20

(ग) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ प्राचल θ वाले बर्नोली समष्टि से एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। मानिए कि θ अतिप्राचल (a, b) वाला बीटा पूर्व बंटन रखता है। θ के लिए द्विघात हानि फलन के अन्तर्गत बेज़ आकलक प्राप्त कीजिए और फिर θ के लिए अल्पमहिष्ठ आकलक प्राप्त कीजिए। 20

Section—B

5. Answer *any* **five** parts of the following : 12×5=60

(a) Consider a population of 3 units U_1, U_2 and U_3. The size measures of U_1, U_2 and U_3 are respectively $X_1 = 6$, $X_2 = 4$ and $X_3 = 2$. A sample of two units is drawn from the population without replacement such that the first unit is selected with probability proportional to their sizes and second unit is selected with probability proportional to the sizes of the remaining units. If π_i denotes the probability of inclusion of U_i in the sample, show that

$$\pi_1 = \frac{51}{60}, \; \pi_2 = \frac{44}{60}, \; \pi_3 = \frac{25}{60}$$

(b) $X = [X_1, X_2, X_3]'$ has 3-variate normal distribution with mean vector μ and covariance matrix Σ, where

$$\mu = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Show that X_1 and X_2 are not independent but $[X_1, X_2]'$ is independent of X_3. Further show that $\frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ and X_3 are also independent.

खण्ड—ख

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच भागों के उत्तर दीजिए : 12×5=60

(क) तीन इकाइयों U_1, U_2 और U_3 के एक समष्टि को मानिए। U_1, U_2 और U_3 के आमाप के माप क्रमशः $X_1 = 6$, $X_2 = 4$ और $X_3 = 2$ हैं। समष्टि से दो इकाइयों का एक प्रतिदर्श प्रतिस्थापनरहित इस प्रकार निकाला जाता है कि प्रथम इकाई उनकी आमापों के आनुपातिक प्रायिकता के साथ चयनित की जाती है और दूसरी इकाई बची हुई इकाइयों के आमापों के आनुपातिक प्रायिकता के साथ चयनित की जाती है। यदि π_i प्रतिदर्श में U_i इकाई के सम्मिलित होने की प्रायिकता संकेत चिह्नित करती है, तो दर्शाइए कि

$$\pi_1 = \frac{51}{60},\ \pi_2 = \frac{44}{60},\ \pi_3 = \frac{25}{60}$$

(ख) $X = [X_1, X_2, X_3]'$ माध्य सदिश μ और सहप्रसरण मैट्रिक्स Σ वाला 3-चर प्रसामान्य बंटन रखता है, जहाँ

$$\mu = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ और } \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

दर्शाइए कि X_1 और X_2 स्वतंत्र नहीं हैं परन्तु $[X_1, X_2]'$ X_3 से स्वतंत्र है। आगे दर्शाइए कि $\frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ और X_3 भी स्वतंत्र हैं।

(c) $X = [X_1, X_2, X_3]'$ has 3-variate normal distribution with mean vector μ and dispersion matrix Σ, where

$$\mu = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ and } \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Derive the distribution of

$$Y = 4X_1 - 6X_2 + X_3 \text{ and } Z = \begin{bmatrix} X_1 - X_2 + X_3 \\ 2X_1 + X_2 - X_3 \end{bmatrix}$$

(d) Consider the mean vector for $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ to be $\mu_x = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ and for Y to be $\mu_y = 4$. The covariance matrices for X_1, X_2 and Y are

$$\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_{YY} = 9 \text{ and } \Sigma_{XY} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fit the equation $Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$ and calculate multiple correlation coefficient.

(e) In a population consisting of three units U_1, U_2 and U_3, the observations are Y_1, Y_2 and Y_3 respectively. A sample of size 2 is drawn from the population by using simple random sampling

(ग) $X = [X_1, X_2, X_3]'$ माध्य सदिश μ और परिक्षेपण मैट्रिक्स Σ वाला 3-चर प्रसामान्य बंटन रखता है, जहाँ

$$\mu = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ और } \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Y = 4X_1 - 6X_2 + X_3 \text{ और } Z = \begin{bmatrix} X_1 - X_2 + X_3 \\ 2X_1 + X_2 - X_3 \end{bmatrix}$$

के बंटन प्राप्त कीजिए।

(घ) $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ के लिए माध्य सदिश $\mu_x = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ और Y के लिए $\mu_y = 4$ मानिए। X_1, X_2 और Y के लिए सहप्रसरण मैट्रिक्स $\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\sigma_{YY} = 9$ और $\Sigma_{XY} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ हैं। $Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$ समीकरण का आसंजन कीजिए और बहु-सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए।

(ङ) तीन इकाइयों U_1, U_2 और U_3 से बने एक समष्टि में प्रेक्षण क्रमशः Y_1, Y_2 और Y_3 हैं। प्रतिस्थापनरहित सरल यादृच्छिक प्रतिचयन द्वारा 2 आमाप का एक प्रतिदर्श

without replacement. Define an estimator T as follows :

$$T = \begin{cases} \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{2}Y_2 \ , & \text{if } U_1 \text{ and } U_2 \text{ selected} \\ \frac{1}{2}Y_1 + \frac{2}{3}Y_3 \ , & \text{if } U_1 \text{ and } U_3 \text{ selected} \\ \frac{1}{2}Y_2 + \frac{1}{3}Y_3 \ , & \text{if } U_2 \text{ and } U_3 \text{ selected} \end{cases}$$

Show that T is unbiased estimator of population mean and has smaller variance than sample mean if $Y_3(3Y_2 - 3Y_1 - Y_3) > 0$.

(f) Explain in detail, the procedure of randomization (i.e., allocation of treatments randomly to plots) followed in randomized block design and Latin square design.

6. *(a)* Let $X = [X_1, X_2, ..., X_p]'$ denote a column vector of variables X_i's. Prove that Y follows a p-variate normal distribution $N_p(\mu, \Sigma)$ iff there exists a random $X = [X_1, X_2, ..., X_p]'$ of independent standard normal variables X_i's such that $Y = \mu + BX$ with probability one for some matrix B of full rank and $BB' = \Sigma$. 20

(b) Distinguish between 2^3- and 3^2-factorial experiments. Explain, how you will get sum of squares due to main and interactions in 3^2-factorial experiments.

समष्टि से निकाला जाता है। कोई आकलक T निम्नलिखित के भाँति परिभाषित कीजिए :

$$T = \begin{cases} \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{2}Y_2 & \text{, यदि } U_1 \text{ और } U_2 \text{ चयनित हों} \\ \frac{1}{2}Y_1 + \frac{2}{3}Y_3 & \text{, यदि } U_1 \text{ और } U_3 \text{ चयनित हों} \\ \frac{1}{2}Y_2 + \frac{1}{3}Y_3 & \text{, यदि } U_2 \text{ और } U_3 \text{ चयनित हों} \end{cases}$$

दर्शाइए कि T समष्टि माध्य का अनभिनत आकलक है और प्रतिदर्श माध्य से कम प्रसरण रखता है, यदि $Y_3(3Y_2 - 3Y_1 - Y_3) > 0$ हो।

(च) यादृच्छिकीकृत खण्डक अभिकल्पना और लैटिन वर्ग अभिकल्पना में अनुसरित यादृच्छिकीकरण (अर्थात् यादृच्छिक रूप से उपचारों का भूखण्डों में आबंटन) कार्यविधि का विस्तारपूर्वक वर्णन कीजिए।

6. (क) माना कि $X = [X_1, X_2, \ldots, X_p]'$ चरों X_i के स्तम्भ सदिश को संकेत चिह्नित करता है। सिद्ध कीजिए कि Y तब और केवल तभी p-चर प्रसामान्य बंटन $N_p(\mu, \Sigma)$ का अनुसरण करेगा, जब स्वतंत्र मानक प्रसामान्य चरों X_i का एक यादृच्छिक चर $X = [X_1, X_2, \ldots, X_p]'$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि कोई पूर्ण कोटि मैट्रिक्स B और $BB' = \Sigma$ के लिए प्रायिकता एक के साथ $Y = \mu + BX$. 20

(ख) 2^3- और 3^2-बहुउपादानी प्रयोगों के बीच अन्तर स्पष्ट कीजिए। समझाइए कि आप 3^2-बहुउपादानी प्रयोग में मुख्य और अन्योन्यक्रिया के कारण वर्गों का योग किस प्रकार प्राप्त करेंगे। यदि r खण्डक वाले, प्रत्येक 9 भूखण्ड

Give format of ANOVA table for 3^2-factorial experiment mentioning degrees of freedom if randomized block design having r blocks containing 9 plots each is used. 20

(c) From a population of N units, a random sample of 3 units is drawn by simple random sampling with replacement. Find the expectation of distinct units in the sample. Define T as mean of distinct units in the sample. Show that T is unbiased estimate of population mean. 20

7\. (a) Let X be distributed as $N_p(\mu, \Sigma)$ (a p-variate normal distribution). Prove that $Y = CX$, where C is $r \times p$ matrix of rank r $(1 \leq r \leq p)$, is distributed as $N_r(C\mu, C\Sigma C')$. 20

(b) The variable X under study has rectangular distribution in the interval $(a, a+d)$. The interval is divided into k equal subintervals which form k strata of equal sizes. From each stratum, a simple random sample of n/k units is drawn. Let V_1 and V_2 be the variances of estimator of population mean based on stratified and unstratified samples of size n respectively. Prove that $V_1 / V_2 = k^{-2}$. 20

रखने वाले, यादृच्छिकीकृत खण्डक अभिकल्पना का प्रयोग किया जाता है, तो 3^2-बहुउपादानी प्रयोग के लिए ANOVA सारणी की रूपरेखा स्वतंत्रता कोटि का उल्लेख करते हुए दीजिए। 20

(ग) N इकाइयों के एक समष्टि से, प्रतिस्थापन सहित सरल यादृच्छिक प्रतिचयन द्वारा, 3 इकाइयों का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श निकाला जाता है। प्रतिदर्श में भिन्न इकाइयों की संख्या की प्रत्याशा प्राप्त कीजिए। प्रतिदर्श में भिन्न इकाइयों के माध्य की भाँति T को परिभाषित कीजिए। दर्शाइए कि T समष्टि माध्य का अनभिनत आकलन है। 20

7. (क) माना कि X, $N_p(\mu, \Sigma)$ (p-चर प्रसामान्य बंटन) की भाँति बंटित है। सिद्ध कीजिए कि $Y = CX$, जहाँ C कोटि r $(1 \leq r \leq p)$ की $r \times p$ मैट्रिक्स है, $N_r(C\mu, C\Sigma C')$ की भाँति बंटित है। 20

(ख) अध्ययनांतर्गत चर X अन्तराल $(a, a+d)$ में आयताकार बंटन रखता है। अन्तराल को बराबर k उप-अन्तरालों में विभक्त किया जाता है जो समान आमाप के k स्तर बनाते हैं। प्रत्येक स्तर से n/k इकाइयों का एक सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श निकाला जाता है। माना कि V_1 और V_2 क्रमशः n आमाप के स्तरित और अस्तरित प्रतिदर्शों पर आधारित समष्टि माध्य के आकलकों के प्रसरण हैं। सिद्ध कीजिए कि $V_1 / V_2 = k^{-2}$. 20

(c) In a randomized block design with k treatments and r replications, two observations are missing. One missing observation is related to ith treatment in jth block and the other is related to αth treatment in βth block ($i \neq \alpha$ and $j \neq \beta$). How will you estimate the missing observations? Derive the expressions for the estimate of missing observations. 20

8. (a) Define ratio estimator for estimating the population total and derive expression for the standard error of the estimator. 20

(b) Obtain an expression for estimated value of Y for given $X = x_0$ by fitting a curve $e^X Y = a + be^{2X}$ to n given points (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ using least-square method. 20

(c) Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample from p-variate normal distribution $N_p(\mu 1, \Sigma)$, where $X_\alpha = [X_{1\alpha}, X_{2\alpha}, \ldots, X_{p\alpha}]'$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$; $1_{p \times 1} = [1, 1, \ldots, 1]'$ and $\Sigma_{p \times p}$ is known. Define

$$T_1 = \frac{1'\overline{X}}{1'1} \text{ and } T_2 = \frac{1'\Sigma^{-1}\overline{X}}{1'\Sigma^{-1}1}$$

where $\overline{X} = [\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_p]'$ and

$$\overline{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} X_{i\alpha}, \quad i = 1, 2, \ldots, p$$

Prove that T_1 and T_2 are unbiased estimators of μ and $V(T_2) < V(T_1)$. 20

(ग) k उपचारों और r पुनरावृत्तियों वाले किसी यादृच्छिकीकृत खण्डक अभिकल्पना में दो प्रेक्षण लुप्त हैं। एक लुप्त प्रेक्षण i वें उपचार और j वें खण्डक से सम्बन्धित है और दूसरा α वें उपचार और β वें खण्डक ($i \neq \alpha$ और $j \neq \beta$) से सम्बन्धित है। लुप्त प्रेक्षणों का आकलन आप कैसे करेंगे? लुप्त प्रेक्षणों के आकलन के लिए व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए। 20

8. (क) समष्टि योग के आकलन हेतु आनुपातिक आकलक की परिभाषा दीजिए और आकलक के मानक त्रुटि के लिए व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए। 20

(ख) न्यूनतम-वर्ग विधि का प्रयोग करते हुए, दिये गये n बिन्दुओं (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ पर वक्र $e^X Y = a + be^{2X}$ आसंजित कर Y, जबकि $X = x_0$, के आकलित मान के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए। 20

(ग) माना कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ p-चर प्रसामान्य बंटन $N_p(\mu 1, \Sigma)$ से कोई यादृच्छिक प्रतिदर्श है, जहाँ $X_\alpha = [X_{1\alpha}, X_{2\alpha}, \ldots, X_{p\alpha}]'$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$; $1_{p\times 1} = [1, 1, \ldots, 1]'$ और $\Sigma_{p\times p}$ ज्ञात है। परिभाषित कीजिए

$$T_1 = \frac{1'\overline{X}}{1'1} \quad \text{और} \quad T_2 = \frac{1'\Sigma^{-1}\overline{X}}{1'\Sigma^{-1}1}$$

जहाँ $\overline{X} = [\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_p]'$ और $\overline{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} X_{i\alpha}$, $i = 1, 2, \ldots, p$. सिद्ध कीजिए कि T_1 और T_2, μ के अनभिनत आकलक हैं और $V(T_2) < V(T_1)$. 20

★ ★ ★

C–DTN–K–TUA

सांख्यिकी

प्रश्न-पत्र—I

समय : तीन घण्टे

पूर्णांक : 300

अनुदेश

प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपा है।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख उत्तर-पुस्तक के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्रवेश-पत्र पर उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं। बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

प्रत्येक प्रश्न के लिए नियत अंक प्रश्न के अंत में दिए गए हैं।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

प्रयुक्त संकेत और प्रतीक प्रचलित पद्धति के अनुसार हैं।

Note : English version of the Instructions is printed on the front cover of this question paper.