गणित (प्रश्न-पत्र–II)

समय : तीन घण्टे	अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

(उत्तर देने के पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें)

दो खण्डों में कुल आठ प्रश्न दिए गए हैं जो हिन्दी एवं अंग्रेजी दोनों में छपे हैं।

उम्मीदवार को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको स्पष्टतया निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के प्रयासों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा न गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़े गए कोई पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णतः काट दीजिए।

MATHEMATICS (PAPER–II)

Time Allowed : Three Hours	Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1. *(a)* *(i)* कोटि 8 के चक्रीय समूह G के कितने जनक होते हैं? व्याख्या कीजिए।

How many generators are there of the cyclic group G of order 8? Explain.

(ii) कोटि 4 के एक समूह $\{e, a, b, c\}$ को लेते हुए, जहाँ e तत्समक (आइडेंटिटि) है, संयोजन सारणियाँ बनाइए यह दर्शाते हुए कि एक चक्रीय है जबकि दूसरी नहीं है।

Taking a group $\{e, a, b, c\}$ of order 4, where e is the identity, construct composition tables showing that one is cyclic while the other is not. 5+5=10

(b) वलय का एक ऐसा उदाहरण दीजिए, जिसका तत्समक है परन्तु जिसके एक उपवलय का भिन्न तत्समक है।

Give an example of a ring having identity but a subring of this having a different identity. 10

(c) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$ के अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence and absolute convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$. 10

(d) दर्शाइए कि फलन $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x + y$ प्रसंवादी है। इसका संयुग्मी प्रसंवादी फलन $u(x, y)$ ज्ञात कीजिए। संगत विश्लेषिक फलन $f(z) = u + iv$ को भी z के पदों में ज्ञात कीजिए।

Show that the function $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x + y$ is harmonic. Find its conjugate harmonic function $u(x, y)$. Also, find the corresponding analytic function $f(z) = u + iv$ in terms of z. 10

(e) निम्नलिखित नियतन समस्या को *अधिकतम* बिक्री करने के लिए हल कीजिए :

Solve the following assignment problem to *maximize* the sales : 10

Salesmen (विक्रेता) \ Territories (क्षेत्र)	I	II	III	IV	V
A	3	4	5	6	7
B	4	15	13	7	6
C	6	13	12	5	11
D	7	12	15	8	5
E	8	13	10	6	9

2. *(a)* यदि R एक वलय है, जिसका तत्समक अवयव 1 है तथा R आच्छादक R' (R onto R') की एक समाकारिता ϕ है, तो सिद्ध कीजिए R' का तत्समक अवयव $\phi(1)$ है।

If R is a ring with unit element 1 and ϕ is a homomorphism of R onto R', prove that $\phi(1)$ is the unit element of R'. 15

(b) क्या फलन

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

रीमान समाकलनीय है? यदि हाँ, तो $\int_0^1 f(x)\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Is the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Riemann integrable? If yes, obtain the value of $\int_0^1 f(x)\,dx$. 15

(c) फलन $f(z) = \dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$ के बिन्दु $z=0$ के इर्द-गिर्द सभी संभव टेलर तथा लौराँ श्रेणियों में प्रसारों को ज्ञात कीजिए।

Find all possible Taylor's and Laurent's series expansions of the function $f(z) = \dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$ about the point $z=0$. 20

3. *(a)* कौशी अवशेष प्रमेय का कथन लिखिए। इसका इस्तेमाल करते हुए समाकल

$$\int_C \frac{e^z+1}{z(z+1)(z-i)^2}\,dz; \quad C: |z| = 2$$

का मान निकालिए।

State Cauchy's residue theorem. Using it, evaluate the integral

$$\int_C \frac{e^z+1}{z(z+1)(z-i)^2}\,dz; \quad C: |z| = 2$$

15

(b) फलनों की श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{(1+n^2x^2)}$ का एकसमान अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

Test the series of functions $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{(1+n^2x^2)}$ for uniform convergence. 15

(c) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या पर विचार कीजिए :

अधिकतमीकरण कीजिए $Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$

बशर्ते कि

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12$$
$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Consider the following linear programming problem :

Maximize $Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$

subject to

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12$$
$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(i) परिभाषा का इस्तेमाल करते हुए इसके सभी *आधारी हल* ज्ञात कीजिए। इनमें कौन-से अपभ्रष्ट आधारी सुसंगत हल हैं और कौन-से अनपभ्रष्ट आधारी सुसंगत हल हैं?

Using the definition, find its all *basic solutions.* Which of these are degenerate basic feasible solutions and which are non-degenerate basic feasible solutions?

(ii) समस्या को हल किए बिना दर्शाइए कि इसका इष्टतम हल है। आधारी सुसंगत हलों में कौन-सा/से इष्टतम हल है/हैं?

Without solving the problem, show that it has an optimal solution. Which of the basic feasible solution(s) is/are optimal? 20

4. (a) क्या निम्नलिखित समुच्चय साधारण योग तथा गुणन के अन्तर्गत पूर्णांकीय प्रांत बनाते हैं? यदि ऐसा है, तो बताइए कि क्या वे क्षेत्र हैं :

Do the following sets form integral domains with respect to ordinary addition and multiplication? If so, state if they are fields : 5+6+4=15

(i) $b\sqrt{2}$ के रूप की संख्याओं का समुच्चय, जहाँ b परिमेय संख्या है

The set of numbers of the form $b\sqrt{2}$ with b rational

(ii) सम पूर्णांकों का समुच्चय

The set of even integers

(iii) धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय

The set of positive integers

(b) क्षेत्र $x^2 + 2y^2 \leq 1$ पर फलन $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - y$ के *निरपेक्ष* (ऐब्सोल्यूट) उच्चतम तथा निम्नतम मानों को ज्ञात कीजिए।

Find the *absolute* maximum and minimum values of the function $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - y$ over the region $x^2 + 2y^2 \leq 1$. 15

(c) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को एकधा विधि द्वारा हल कीजिए। इसकी द्वैती समस्या लिखिए। दी गई समस्या की इष्टतम सारणी से द्वैती समस्या का इष्टतम हल भी लिखिए :

अधिकतमीकरण कीजिए $Z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3$

बशर्ते कि

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 2$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 1$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$$

Solve the following linear programming problem by the simplex method. Write its dual. Also, write the optimal solution of the dual from the optimal table of the given problem : 20

Maximize $Z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3$

subject to

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 2$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 1$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$$

खण्ड—B / SECTION—B

5. (a) आंशिक अवकल समीकरण

$$(y^2 + z^2 - x^2)\,p - 2xyq + 2xz = 0$$

जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, को हल कीजिए।

Solve the partial differential equation

$$(y^2 + z^2 - x^2)\,p - 2xyq + 2xz = 0$$

where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ and $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. 10

(b) $(D^2 + DD' - 2D'^2)u = e^{x+y}$ को हल कीजिए, जहाँ $D = \frac{\partial}{\partial x}$ तथा $D' = \frac{\partial}{\partial y}$.

Solve $(D^2 + DD' - 2D'^2)u = e^{x+y}$, where $D = \frac{\partial}{\partial x}$ and $D' = \frac{\partial}{\partial y}$. 10

(c) बूलीय व्यंजक $((p \wedge q) \to r) \vee ((p \wedge q) \to -r)$ के लिए तीन चरों p, q, r में मुख्य (अथवा विहित) वियोजनीय (डिसजंक्टिव) प्रसामान्य रूप ज्ञात कीजिए। क्या दिया गया बूलीय व्यंजक एक विरोध है या कि एक पुनरावृत्ति है?

Find the principal (or canonical) disjunctive normal form in three variables p, q, r for the Boolean expression $((p \wedge q) \to r) \vee ((p \wedge q) \to -r)$. Is the given Boolean expression a contradiction or a tautology? 10

(d) धनात्मक x-दिशा में एक एकसमान प्रवाह U_0 का विचार कीजिए। त्रिज्या a का एक बेलन मूलबिन्दु पर स्थित है। प्रवाह फलन तथा वेग विभव ज्ञात कीजिए। प्रगतिरोध (स्टैग्नेशन) बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

Consider a uniform flow U_0 in the positive x-direction. A cylinder of radius a is located at the origin. Find the stream function and the velocity potential. Find also the stagnation points. 10

(e) भर m का एक ठोस एकसमान गोलार्ध $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ के, OZ-अक्ष के इर्द-गिर्द, जड़त्व-आघूर्ण का परिकलन कीजिए।

Calculate the moment of inertia of a solid uniform hemisphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ with mass m about the OZ-axis. 10

6. (a) $p \cos(x+y) + q \sin(x+y) = z$, जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, को व्यापक हल के लिए हल कीजिए।

Solve for the general solution $p \cos(x+y) + q \sin(x+y) = z$, where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ and $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. 15

(b) हैमिल्टोनियन उपागम का इस्तेमाल करते हुए समतल लोलक समस्या को हल कीजिए तथा दर्शाइए कि H गति का एक स्थिरांक है।

Solve the plane pendulum problem using the Hamiltonian approach and show that H is a constant of motion. 15

(c) लग्रांज अंतर्वेशी बहुपद ज्ञात कीजिए, जो निम्नलिखित आँकड़ों को समंजन करता है :

x	:	-1	2	3	4
$f(x)$	:	-1	11	31	69

$f(1 \cdot 5)$ ज्ञात कीजिए।

Find the Lagrange interpolating polynomial that fits the following data :

x	:	-1	2	3	4
$f(x)$	:	-1	11	31	69

Find $f(1 \cdot 5)$. 20

7. (a) प्रारंभिक-परिसीमा मान समस्या

$$u_t - u_{xx} + u = 0, \quad 0 < x < l, \; t > 0$$
$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0$$
$$u(x, 0) = x(l - x), \quad 0 < x < l$$

का हल ज्ञात कीजिए।

Find the solution of the initial-boundary value problem

$$u_t - u_{xx} + u = 0, \quad 0 < x < l, \; t > 0$$
$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0$$
$$u(x, 0) = x(l - x), \quad 0 < x < l$$

15

(b) पग आकार $h = 0 \cdot 2$ के साथ रंगे-कुट्टा चतुष्कोटि विधि का इस्तेमाल करते हुए प्रारंभिक मान समस्या $\frac{dy}{dx} = x(y - x)$, $y(2) = 3$ को अंतराल $[2, 2 \cdot 4]$ में हल कीजिए।

Solve the initial value problem $\frac{dy}{dx} = x(y - x)$, $y(2) = 3$ in the interval $[2, 2 \cdot 4]$ using the Runge-Kutta fourth-order method with step size $h = 0 \cdot 2$. 15

(c) स्वातंत्र्य कोटि एक के एक निकाय के एक हैमिल्टोनियन का रूप निम्नलिखित है :

$$H = \frac{p^2}{2\alpha} - bqpe^{-\alpha t} + \frac{b\alpha}{2} q^2 e^{-\alpha t}(\alpha + be^{-\alpha t}) + \frac{k}{2} q^2$$

जहाँ α, b, k स्थिरांक हैं, q व्यापकीकृत निर्देशांक है तथा p संगत व्यापकीकृत संवेग है।

A Hamiltonian of a system with one degree of freedom has the form

$$H = \frac{p^2}{2\alpha} - bqpe^{-\alpha t} + \frac{b\alpha}{2} q^2 e^{-\alpha t}(\alpha + be^{-\alpha t}) + \frac{k}{2} q^2$$

where α, b, k are constants, q is the generalized coordinate and p is the corresponding generalized momentum.

(i) इस हैमिल्टोनियन के संगत एक लग्रांजी ज्ञात कीजिए।

Find a Lagrangian corresponding to this Hamiltonian.

(ii) एक तुल्य लग्रांजी ज्ञात कीजिए, जो कि समय पर स्पष्ट रूप से आश्रित नहीं है।

Find an equivalent Lagrangian that is not explicitly dependent on time.

10+10=20

8. *(a)* द्वितीय-कोटि आंशिक अवकल समीकरण

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

को विहित रूप में समानीत कीजिए तथा इसका व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Reduce the second-order partial differential equation

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

into canonical form. Hence, find its general solution. 15

(b) गाउस-सीडेल विधि का इस्तेमाल करते हुए निकाय

$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 &= 15 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 27 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 10x_4 &= -9 \end{aligned}$$

का हल ज्ञात कीजिए (चार पुनरावृत्ति कीजिए)।

Find the solution of the system

$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 &= 15 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 27 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 10x_4 &= -9 \end{aligned}$$

using Gauss-Seidel method (make four iterations). 15

(c) दर्शाइए कि अक्षतः सममित गति में सांतत्य समीकरण के कारण धारा फलन का अस्तित्व है। धारा फलन के पदों में वेग घटकों को व्यक्त कीजिए। यदि प्रवाह अघूर्णनी है, तो समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि धारा फलन द्वारा सन्तुष्ट होती है।

In an axisymmetric motion, show that stream function exists due to equation of continuity. Express the velocity components in terms of the stream function. Find the equation satisfied by the stream function if the flow is irrotational. 20

★ ★ ★